

常数项级数的概念微课教学设计

教师教育系 焦云芳

授课信息			
授课主题	常数项级数的概念	教学方法	讲授法 问答法
所属课程	高等数学	适用专业	理工科
课程性质	公共基础课	授课学时	1 学时
所用教材	同济大学《高等数学》第七版		
教学目标			
知识目标	1. 掌握常数项级数的概念 2. 理解常数项级数敛散性的定义——基本审敛法 3. 熟记等比级数的敛散性		
能力目标	熟练应用基本审敛法判定常数项级数的敛散性		
课程思政	1. 学习哲学家的思辨能力 2. 数学的发展是数学家们不断努力的结果，学习数学家坚韧不拔的钻研精神 3. 学习我国古人的智慧，增强民族自豪感		
重点难点			
重点	常数项级数敛散性的定义		
难点	常数项级数敛散性的定义		
	解决方法：用“一尺之锤，日取其半，万世不竭”作为例子，让同学们从直观理解级数收敛的本质是前 n 项部分和收敛，进一步从理论上推导此结论。		
教学过程			
教学环节	教学内容		设计意图
课前准备	等比数列前 n 项和公式 数列收敛的定义		为本节课的使用做准备

一、学数学史，引入新课

1. 引例——芝诺悖论

利用动画展示芝诺悖论——阿基里斯追赶乌龟的问题。假设乌龟先跑10米，阿基里斯再以乌龟10倍速度去追赶，乌龟和阿基里斯都匀速前进，问阿基里斯能否追上乌龟？芝诺认为，阿基里斯只有到达乌龟的起点才能追上乌龟，而当阿基里斯跑完10米时，乌龟向前爬行了1米，当阿基里斯跑完1米时，乌龟又向前爬行了 $\frac{1}{10}$ 米，如此过程不断的继续，乌龟不断的产生新的起点，所以“阿基里斯永远也追不上乌龟！”

提问：“事实果真如此吗？”不！事实是阿基里斯必将在跑完确定的路程后追上乌龟！

2. 分析悖论

芝诺的推理在逻辑上似乎没有任何毛病，那么问题究竟出现在哪里呢？

设阿基里斯在追赶乌龟的过程中所经过的路程分别为 $10, 1, \frac{1}{10}, \dots$ ，这是个公比为 $\frac{1}{10}$ 的无穷等比数列，如果把所有的路程都加起来

$$S=10+1+\frac{1}{10}+\dots+\dots$$

会得到一个什么样的结果呢？这是一个无穷多个数相加的形式，是个无限和。无限和会不会是一个有限的数呢？这无穷多个数相加的形式就是我们这节课要学习的常数项级数

1. 设计意图：

通过设计的动画演示阿基里斯与乌龟的追赶过程，使学生明白悖论所描述的问题，从而到达吸引学生眼球，激发求知欲望和解决问题的积极性。

思政元素：无穷级数理论的理论从萌芽到逐步完善、成熟再到近代理论的进一步发展，处处体现出数学家们的坚持不懈，勇于探索的精神。当代大学生不仅要学习数学家、哲学家的思辨能力，还要学习他们坚忍不拔的科研精神，还要学习他们为科学的奉献精神。

2. 在解决悖论前先分析问题，帮助学生寻找解决问题的关键与方法，为学习新课铺垫基础！

二、学习常数项级数的概念，揭示其本质

1. 学习常数项无穷级数的概念

定义只是形式上的表示，还需要进一步给出确切的数学解释

思考：

- (1) 无限个数相加结果是否有意义？
- (2) 如果有意义会不会是个确定的数？
- (3) 如果是个确定的数，该如何求呢？

2. 剖析无穷级数敛散性的概念

借助《庄子 天下篇》中的一段话：“一尺之锤，日取其半，万世不竭”所蕴含的数学问题，从直观上和理论上回答思考的三个问题，从而抽象出无穷级数敛散性的概念，并得到结论：

- (1) 常数项无穷级数当且仅当其收敛时其和才是一个确定的数
- (2) 常数项级数的基本审敛法——定义法，常数项级数收敛的充分必要条件是部分和数列收敛。

基本思路：借助有限和推广到无穷和，先讨论其部分和，再由部分和数列的敛散性定义常数项无穷级数的敛散性。

设计意图：在讨论常数项无穷级数敛散性概念时，注重用截取木棒的动画直观演示与理论相结合，注重用已知的有限和与数列极限的知识为铺垫，逐步推广到对未知的无穷和的讨论，新旧知识联系，思路清晰，直观，自然，容易被学生接受，此过程告诉学生解决问题就要抓住问题的本质，为进一步应用做铺垫。

思政元素：体会我国古人的智慧，增强民族自豪感，培养爱国主义情操！

	<p>三、应用举例，巩固概念</p> <p>1. 讨论等级级数（也叫几何级数）</p> $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots, (a \neq 0)$ <p>的敛散性。</p> <p>请学生务必牢记此结论：当$q \geq 1$时，级数发散，当$q < 1$时，级数收敛于$\frac{a}{1-q}$</p> <p>2. 引例回顾，应用所学知识解决实际问题</p> <p>阿基里斯追赶乌龟所经过的总路程</p> $S = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \dots + \dots$ <p>这是个公比$0 < q = \frac{1}{10} < 1$的等比级数，由例1的结论可知，该级数收敛，其和为</p> $S = \frac{10}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{100}{9}$ <p>虽然由无限段路程，但这无限段路程的总合却是一个确定的数，即阿基里斯跑过$\frac{100}{9}$米的路程即可追上乌龟。</p> <p>推导等比级数敛散性的结论，强调其在今后讨论级数敛散性的重要性，并用此结论彻底解决芝诺悖论。</p>	<p>设计意图：作为概念的应用，选择了简单，具有代表性且在无穷级数敛散性判定中起着非常重要作用的等比级数，给出严格的推导过程，培养学生规范解题和书写的能力。</p> <p>利用等比级数敛散性的判定解决芝诺悖论，给出严谨的数学解释，使得整节课前后呼应，有问题有解答，让学生心满意足，且认知水平从理论上升到应用。</p> <p>思政元素；</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 感受到数学的理性美在实际生活中的无处不在。 2. 在生活中遇到事情，不能想当然，不能经验论，一定要尊重科学，尊重事实！
小结与课后拓展		
<p>小结</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. 常数项级数的基本概念 2. 基本审敛法：若部分和数列收敛则级数收敛 3. 等比级数敛散性的结论 	<p>设计意图：</p> <p>深化学习</p>
<p>课后拓展</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. 小球从十米的高空落下， 	<p>设计意图：小结课堂主要内容</p>

	<p>触地后弹起，假设每次弹起的高度减半，请问小球会停止跳动吗？请用所学知识给出合理的数学解释。</p> <p>2. 在芝诺悖论中，换个角度来思考，如果将阿基里斯追赶乌龟所用时间加起来，能不能得到阿基里斯在跑过有限的时间后可以追上乌龟的结论？</p>	<p>容，强调对常数项级数敛散性概念的理解和等比级数敛散性判定的掌握，布置和实际应用有关的作业。</p> <p>思政元素：让学生“学以致用”，彻底打消“学数学无用”的想法，树立起学好数学的信心！</p>
--	---	--

教学反思

学习效果	
反思改进	